Verbandsstrukturen im Mathematikunterricht

Von

D. Dorninger, Wien

In den folgenden Ausführungen soll nicht dafür eingetreten werden, bestehende Lehrpläne in irgendeiner Weise zu verändern. Vielmehr ist es Ziel des Autors, Elemente der Verbandstheorie, welche im Mathematikunterricht verstreut anzutreffen sind, unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt von einem zumindest teilweise über dem Schulniveau liegenden Standpunkt aus systematisch zu betrachten, um dadurch eventuell einige Denkanstöße für den Unterricht zu geben. Die dafür gewählte Form ist das Curriculum eines Grundkurses in Verbandstheorie, wie er etwa im Rahmen eines Freifaches Mathematik oder einer Neigungsgruppe denkbar wäre. Die Stoffauswahl, insbesondere die Wahl der Beispiele orientiert sich am Lehrstoff der österreichischen allgemeinbildenden höheren Schulen. Auf mathematische Details wird der Kürze halber nur dort eingegangen, wo sie exemplarisch für eine methodisch didaktische Erörterung sind oder wo angenommen wird, daß sie einigen Lesern nicht geläufig sind.

1. Der Begriff des Verbandes

Der wohl günstigste Ausgangspunkt für verbandstheoretische Betrachtungen ist sicherlich die Besprechung von Halbordnungen, da sich diese durch Diagramme veranschaulichen lassen.

Eine Halbordnung $\langle H,\leq\rangle$ ist eine Menge H zusammen mit einer zweistelligen Relation $\leq$ in H, sodaß gilt:

(H1)	$x\leq x$ für alle $x\in H$	(Reflexivität)
(H2)	Aus $x\leq y$ und $y\leq x$ folgt $x=y$	(Antisymmetrie)
(H3)	Aus $x\leq y$ und $y\leq z$ folgt $x\leq z$	(Transitivität)

Beispiele für Halbordnungen aus der Erlebniswelt des Schülers oder aus der Elementarmathematik lassen sich leicht finden, etwa:

1) Die Menge der Teilnehmer bei einem Verwandtschaftstreffen mit $x\leq y$ im Sinne von "$x=y$ oder x ist Nachkomme von y".

2) Die Potenzmenge $P(M)$ einer Menge M mit der mengentheoretischen Inklusion $\subseteq$ als Halbordnung.
3) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ oder die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit $\leq$ im üblichen Sinn.
4) Die Menge T_n der positiven Teiler einer natürlichen Zahl n mit $x|y$ (x teilt y) für $x \leq y$.

An Hand von Beispiel 4) läßt sich schön zeigen, daß es im allgemeinen mehrere Möglichkeiten gibt, auf einer Menge eine Halbordnung zu definieren (indem man neben $\leq$ im üblichen Sinn die Relation "teilt" betrachtet).

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Veranschaulichung einer Halbordnung ist das sogenannte Hasse-Diagramm. Um dieses erklären zu können, benötigen wir noch die folgenden Begriffe:

Ist $x \leq y$ und gilt $x \neq y$, so heißt x echt kleiner als y (y echt größer als x), wofür wir $x<y$ schreiben.

Ist $x<y$ und gibt es kein z, sodaß $x<z<y$ ist, so heißt y oberer Nachbar von x (und x unterer Nachbar von y).

Ordnet man nun jedem Element x aus einer Halbordnung $\langle H, \leq \rangle$ (bzw. einer "nicht allzu großen" endlichen Teilmenge von H) bijektiv Punkte der Zeichenebene derart zu, daß y "höher liegt" als x, falls $x<y$ ist, (wobei jedoch Verschiebungen in seitlicher Richtung erlaubt sind) und verbindet genau die Punktepaare (x,y), für die gilt: x ist unterer Nachbar von y, so erhält man das Hasse-Diagramm der Halbordnung $\langle H, \leq \rangle$ (bzw. einen endlichen Teilausschnitt davon).

In den nachstehenden Abbildungen 1-5 sind die Hasse-Diagramme von folgenden Halbordnungen wiedergegeben: Abb.1 zeigt ein Diagramm, wie es sich bei Beispiel 1) ergeben kann. In Abb.2 sehen wir das Diagramm der Potenzmenge der dreielementigen Menge $M=\{a,b,c\}$. Abb.3 veranschaulicht $\mathbb{Z}$ mit $\leq$ im üblichen Sinn. Abb.4 ist das Hasse-Diagramm des Verbandes T_{12} der Teiler von 12. Abb.5 erklärt die hierarchische Struktur eines Betriebs, welche ebenfalls eine Halbordnung bildet.

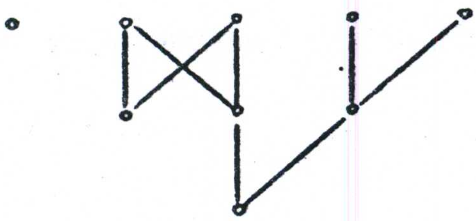

Abb.1

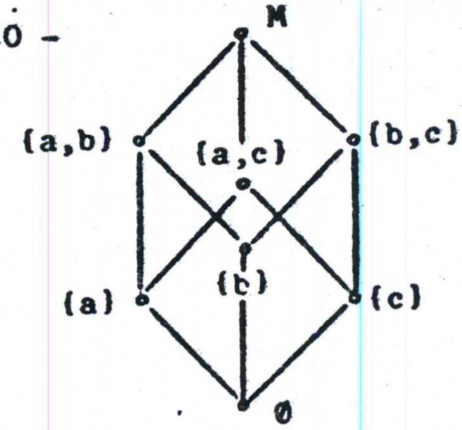

Abb.2

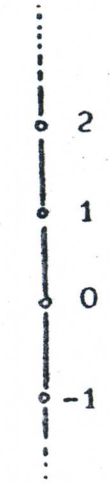

Abb.3

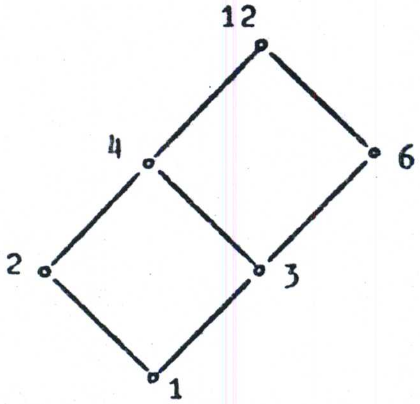

Abb.4

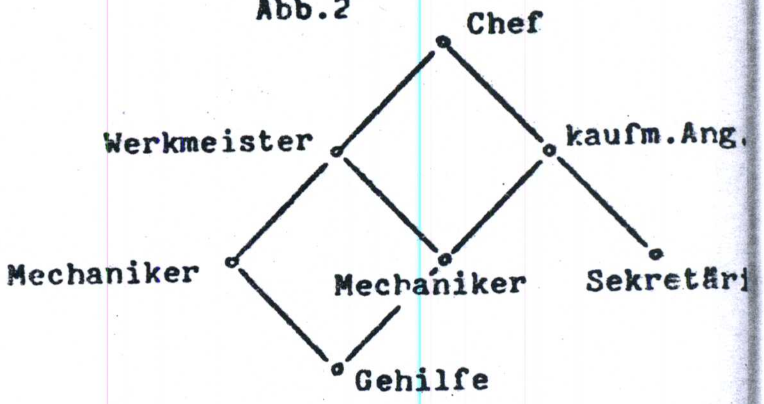

Abb.5

An Hand von Abb.3 läßt sich leicht erklären, was eine Kette ist; Abb.5 zeigt, daß Halbordnungen auch außerhalb der Mathematik (in diesem Fall in den Sozialwissenschaften) von Bedeutung sind.- Mittels obiger Diagramme ist es auch gut möglich, zu erklären, wann eine Halbordnung endlich heißt, ferner, was man unter einer Teilhalbordnung versteht, und wie das größte Element 1 und kleinste Element einer Halbordnung definiert sind. Auch die Begriffe obere und untere Schranke einer Teilmenge und Supremum und Infimum einer Teilmenge lassen sich mit Hilfe der Hasse-Diagramme gut erarbeiten. Wir heben hervor:

Besitzt eine Teilmenge T von H einer Halbordnung $\langle H, \leq \rangle$ unter ihren oberen Schranken in H ein kleinstes Element, so heißt dieses das Supremum von T - in Zeichen: sup T. Gibt es unter den unteren Schranken von T in H ein größtes Element, so wird dieses das Infimum von T - in Zeichen: inf T - genannt.

Infima und Suprema von Teilmengen spielen im Mathematikunterricht bei der Besprechung der rationalen Zahlen Q bzw. bei der Einführung der reellen Zahlen R eine wesentliche Rolle. Ein häufig gewähltes Beispiel ist die Teilmenge T von Q definiert durch $T=\{x \mid 1<x^2<2\}$.

T besitzt wohl ein Infimum, nämlich 1, aber kein Supremum: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Im nächsten Schritt wenden wir uns nun den Halbordnungen zu, bei denen zu je zwei Elementen x und y sowohl $\sup\{x,y\}$ als auch $\inf\{x,y\}$ existiert. Diese Halbordnungen heißen Verbandshalbordnungen und stehen im Mittelpunkt unseres Interesses.

Die Beispiele 2),3) 4) von oben sind alle Verbandshalbordnungen, die Halbordnung in Abb.5 wird zu einer Verbandshalbordnung, falls man ein O-Element als neues Element hinzufügt. Herauszufinden, wie in diesen Verbandshalbordnungen die Infima und Suprema der zweielementigen Teilmengen aussehen, ist eine lohnende Aufgabe für den Unterricht: Erstens ist die Aufgabe für Schüler nicht allzu schwer und zweitens stößt man auf Wohlbekanntes: In P(M) sind Infimum und Supremum gerade der mengentheoretische Durchschnitt bzw. die mengentheoretische Vereinigung, bei Beispiel 3) ist das Infimum das Minimum und das Supremum das Maximum der beiden betrachteten Zahlen,und bei Beispiel 4) treffen wir auf den größten gemeinsamen Teiler als Infimum und das kleinste gemeinsame Vielfache als Supremum.

Setzen wir nun (nahegelegt durch P(M)) in einer beliebigen Verbandshalbordnung $\sup\{x,y\} = x\cup y$ und $\inf\{x,y\} = x\cap y$, so ist die Brücke von den Verbandshalbordnungen zu den Verbänden als algebraische Strukturen geschlagen. Wie man - im Unterricht voraussichtlich nur an Hand einiger konkreter Beispeile oder für einzelne Beziehungen - zeigen kann, gelten in einer Verbandshalbordnung die folgenden Gesetze:

(V1) $x\cup(y\cup z) = (x\cup y)\cup z$ (V1') $x\cap(y\cap z) = (x\cap y)\cap z$

(V2) $x\cup y = y\cup x$ (V2') $x\cap y = y\cap x$

(V3) $x\cup(x\cap y) = x$ (V3') $x\cap(x\cup y) = x$

((V3), (V3') werden Verschmelzungsgesetze genannt.)

Eine Menge V zusammen mit zwei zweistelligen Operationen $\cup$ und $\cap$ ("Vereinigung" und "Durchschnitt"), welche die Gesetze (V1) - (V3') erfüllen, heißt ein Verband - in Zeichen $\langle V,\cup,\cap\rangle$.

Definiert man in einem Verband $\langle V,\cup,\cap\rangle$ eine Relation $\leq$ durch $x\leq y$, falls $x\cap y = x$ (oder äquivalent damit, falls $x\cup y = y$), so erhält man eine Verbandshalbordnung $\langle V, \leq \rangle$, und es gilt: Vermöge der angegebenen Vorschrift entsprechen die Verbände und die Verbandshalbordnungen einander umkehrbar eindeutig. - Der gesamte Beweis dieses Satzes wird zweifelsohne den schulischen Rahmen sprengen; wohl aber kann der Beweis Anlaß für den Lehrer sein, sich zu fragen, ob es, insbesondere in Hinblick auf den Unterricht von Boolescher Algebra, nicht sinnvoller ist, mit dem Verband als algebraische Struktur zu beginnen und erst im nachhinein zu Veranschaulichungszwecken den ordnungstheoretischen Aspekt der Verbände zu berücksichtigen.

Wie gestaltet sich der Unterricht, falls man mit dem Verband als algebraische Struktur beginnt?

Die Zahl der Beispiele könnte (abgesehen von Beispiel 1) und dem in Abb.5 wiedergegebenen Beispiel) genauso erfolgen wie oben (nur mit Angabe der Vorschrift zur Bildung von $\cup$ und $\cap$ an Stelle der Verbandshalbordnung). Daran anschließen könnte die Herleitung einiger einfacher Rechenregeln, insbesondere solcher, welche man zum Nachweis der Halbordnungsaxiome bei Einführung der Verbandshalbordnung benötigt. Dann würde man wohl auch auf die ordnungstheoretische Seite der Verbände - zumindest um Hasse-Diagramme zeichnen zu können - eingehen. Obgleich diese Vorgangsweise sicherlich rationeller ist als die Einführung der Verbände über Halbordnungen, spricht zweierlei dagegen: Erstens wird die Abgrenzung der Verbandshalbordnungen gegenüber den übrigen Halbordnungen mehr oder weniger undeutlich ausfallen, und zweitens wird es sehr viele Schüler geben, denen geometrische Überlegungen leichter fallen als das Denken in einem für sie neuen abstrakten Kalkül.

Nehmen wir nun aber an, der Schüler ist auf die eine oder andere Weise mit dem Verbandsbegriff vertraut. Dann ist es möglich, weitere Beispiele von Verbänden zu besprechen, welche - zumindest in einigen Schultypen - im Unterricht (implizit) vorkommen, die aber von etwas größerem Schwierigkeitsgrad als die oben angeführten sind. Hier ist vor allem zu erwähnen: Der Äquivalenzverband (= Zerlegungsverband) einer Menge.

Ordnet man die Äquivalenzrelationen einer gegebenen Menge M bezüglich der mengentheoretischen Inklusion, so erhält man eine Verbandshalbordnung. In dieser Halbordnung gilt für zwei Äquivalenzrelationen ϕ und ψ von M: $\phi\subseteq\psi$ genau dann, wenn jede Klasse der durch ϕ induzierten Klasseneinteilung von M enthalten ist in einer Klasse der durch ψ induzierten Klasseneinteilung.- In Abbildung 6 ist der Äquivalenzverband von $M=\{a,b,c\}$ wiedergegeben.

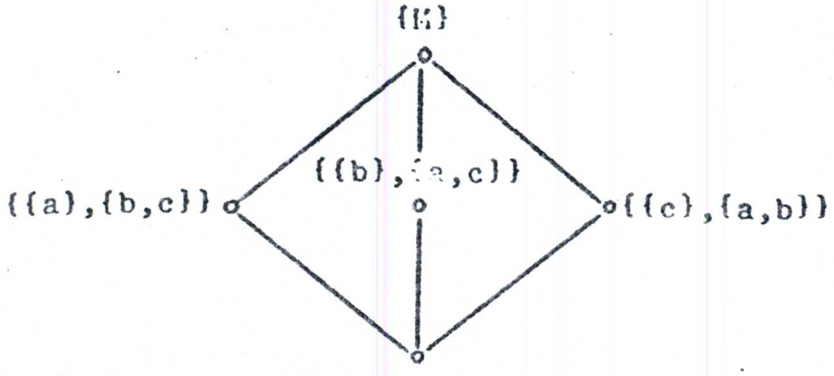

Abb.6

Weitere Beispiele sind: Der Verband der Untergruppen einer Gruppe (mit der mengentheoretischen Inklusion als Verbandsordnung), die reellen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit $f\leq g$ definiert durch $f(x)\leq g(x)$ (im üblichen Sinn) für alle $x\in[0,1]$ und der Verband der Unterräume eines (zwei- oder dreidimensionalen) projektiven Raumes mit "x liegt auf bzw. in y" für $x\leq y$ (Z.B.: Der Punkt x liegt auf der Geraden y.)

2. Verbände mit speziellen Eigenschaften

Hat man genügend viele Beispiele von Verbänden zur Verfügung, so kann man daran gehen, einige Verbandsklassen und deren Eigenschaften etwas genauer zu studieren. Im Zusammenhang mit dem Analysis-Unterricht bieten sich hier etwa die vollständigen Verbände an, also Verbände, bei denen zu jeder beliebigen, nicht-leeren Teilmenge Infimum und Supremum existieren.

Wie der Schüler aus dem Analysis-Unterricht weiß, hat jede nicht-leere beschränkte Teilmenge von reellen Zahlen sowohl ein Infimum als auch ein Supremum, obgleich man im Vollständigkeitsaxiom von $\mathbb{R}$ z.B. nur die Existenz von Suprema fordert. Dies wird klar, falls man den folgenden Satz (dem man eventuell in der Schule sogar beweisen könnte) kennt:

Besitzt in einer nach unten beschränkten Halbordnung jede nicht-leere Teilmenge ein Supremum, so besitzt jede nicht-leere Teilmenge auch ein Infimum.

Die Aussage in Abschnitt 1, daß die Halbordnung, welche die hierarchische Struktur eines Betriebes wiedergibt (Abb.5), durch Hinzufügen eines 0-Elementes zu einer Verbandshalbordnung wird, wird ebenfalls durch obigen Satz verifiziert.

Durch einen direkten Beweis wird der Schüler leicht nachprüfen können, daß jeder endliche Verband vollständig ist, und es wird ihm auch nicht schwerfallen, die Potenzmenge einer Menge als vollständig zu erkennen.

Eine weitere wichtige Klasse von Verbänden ist die Klasse der distributiven Verbände.

Ein Verband $\langle V,\cup,\cap\rangle$ heißt distributiv, falls für alle $x,y,z\in V$ gilt:

(D) $x\cup(y\cap z) = (x\cup y)\cap(x\cup z)$ und (D') $x\cap(y\cup z) = (x\cap y)\cup(x\cap z)$

Die Potenzmengen P(M), Ketten und die Teilerverbände T_n (siehe Beispiel 4)) sind Beispiele von distributiven Verbänden, welche in der Schule besprochen werden können. Desgleichen wird man in der Schule leicht die Aufgabe stellen können, nachzuweisen, daß die in Abbildung 7 dargestellten Verbände M_5 und N_5 nicht distributiv sind. (Es gilt sogar mehr, nämlich, daß ein Verband genau dann distributiv ist, wenn er keinen Unterverband besitzt, welcher zu M_5 oder zu N_5 isomorph ist, d.h. dasselbe Hasse-Diagramm wie M_5 oder N_5 hat.)

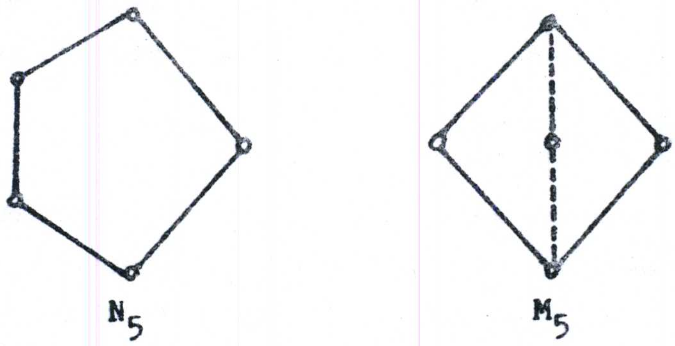

Abb.7

Viele der Eigenschaften vor distributiven Verbänden, welche in der Schule besprochen werden, sind Eigesnschaften der Klasse der sog.

modularen Verbände, welche die Klasse der distributiven Verbände umfaßt. Obgleich man die modularen Verbände im Unterricht sicherlich nicht durchnehmen wird, so ist die Kenntnis der wichtigsten Eigenschaften der modularen Verbände für den Lehrenden dann unerläßlich, wenn er den Stoff von einem "höheren Standpunkt aus" unterrichten möchte. (Ein Beispiel dafür wird weiter unten gegeben).

Ein Verband $\langle V,\cup,\cap\rangle$ heißt modular, falls das folgende "modulare Gesetz" gilt:

(M) Ist $x \geq z$, so ist $x\cap(y\cup z) = (x\cap y)\cup z$

Wie erwähnt, sind alle distributiven Verbände modular. Weitere Beispiele von modularen Verbänden sind der Verband der Normalteiler einer Gruppe (bzw. bei abelschen Gruppen der Verband der Untergruppen), der Verband der Untervektorräume eines Vektorraumes und der Verband der Unterräume eines projektiven Raumes. Der in Abbildung 7 wiedergegebene Verband M_5 ist gleichfalls modular, wohingegen der Verband N_5 nicht modular ist. (Es gilt sogar, daß das Nichtvorhandensein eines Unterverbandes isomorph zu N_5 die modularen Verbände charakterisiert. - Vgl. hierzu die oben angegebene Charakterisierung der distributiven Verbände.)

Eine der wichtigsten Eigenschaften von modularen Verbänden ist, daß alle maximalen (nicht weiter verfeinerbaren) Ketten, welche ein Element eines nach unten beschränkten Verbandes mit dem 0-Element verbinden, gleich lang sind. (Gleich lang heißt hierbei, daß entweder alle maximalen Ketten unendlich sind, oder daß eine maximale Kette endlich viele Elemente hat und dann die übrigen maximalen Ketten genausoviele Elemente wie diese Kette haben). Bezeichnet man in einem Verband endlicher Länge (der Verband ist beschränkt und jede 0 mit 1 verbindende Kette ist endlich) die um 1 verminderte Anzahl der Elemente einer Kette, welche das 0-Element mit einem Element x verbindet, mit dim x, so gilt folgender Dimensionssatz:

$$\dim x + \dim y = \dim (x\cup y) + \dim (x\cap y).$$

Für den Fall, daß der betrachtete Verband der Verband der Untervektorräume eines endlichdimensionalen Vektorraumes oder der Verband der Unterräume eines endlich-dimensionalen projektiven Raumes ist,

ist der Dimensionssatz aus der Linearen Algebra bzw. Geometrie bekannt. Im Falle der Potenzmenge einer endlichen Menge M begegne wir dem Dimensionssatz in der Schule in der Form $a(X)+a(Y) = a(X \cup Y)+a(X \cap Y)$, wobei $a(X)$ die Anzahl der Elemente der Teilmenge X von M bezeichnet. Ist der betrachtete Verband ein endliches Ereignisfeld, so finden wir den Dimensionssatz im Schulunterricht im Additionstheorem der Wahrscheinlichkeitstheorie wieder.

Ein Verband $\langle V,\cup,\cap \rangle$ heißt komplementär, wenn er ein 0- und ein 1-Element besitzt und zu jedem $x \in V$ ein Element $x' \in V$ existiert, sodaß $x \cup x'=1$ und $x \cap x'=0$ ist. Wie uns z.B. die Verbände N_5 und M_5 in Abbildung 7 zeigen, kann es durchaus sein, daß in einem komplementären Verband ein Element mehr als ein Komplement besitz Wie leicht zu zeigen ist, ist jedoch in einem distributiven Verband die Komplementbildung eindeutig, was uns zu der nächsten Klasse von Verbänden, den sog. Booleschen Verbänden, führt.

Ein Verband heißt Boolescher Verband, falls er distributiv und komplementär ist. Fassen wir in einem Booleschen Verband 0 und 1 als nullstellige Operationen und die (eindeutige) Komplementbildu als einstellige Operation auf, so sprechen wir von einer Boolesch Algebra.

Da angenommen werden darf, daß viele Leser mit der Theorie der Booleschen Algebren vertraut sind (-der Unterricht von Boolescher Algebra ist in einigen Schultypen obligatorisch-), beschränken si die folgenden Ausführungen nur auf die Angabe von Beispielen und auf eine Diskussion der Bedeutung der Booleschen Algebra für die Schaltalgebra und Aussagenlogik.

Zunächst die Beispiele: Die klassischen Beispiele für Boolesche Algebren im Schulunterricht sind die Potenzmengen $P(M)$, die σ-Algel (Ereignisfelder), die Teilerverbände T_n, wo n eine quadratfreie natürliche Zahl ist, und die Booleschen Algebren $F_k(B)$ und $P_k(B)$ der k-stelligen Funktionen bzw. Polynomfunktionen über einer Bool Algebra B mit Werten in B.

Auf die beiden letztgenannten Beispiele wollen wir etwas näher ei gehen.

Die Menge der k-stelligen Funktionen über einer Booleschen Algebra B mit Werten in B wird zu einer Booleschen Algebra, indem man - so wie üblich - die Operationen von B punktweise definiert, also z.B. für zwei Funktionen f und g festlegt: $(f \cup g)(a_1,a_2,\ldots,a_k) = f(a_1,a_2,\ldots,a_k) \cup g(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ für alle $(a_1,a_2,\ldots,a_k) \in B^k$.
In der auf diese Weise gewonnenen Booleschen Algebra $F_k(B)$ kommen insbesondere die konstanten Funktionen und die Projektionen $x_1,x_2,\ldots,x_k$ vor, wobei die Projektionen definiert sind durch $x_i(a_1,a_2,\ldots,a_k)=a_i$ für $i=1,2,\ldots,k$.
Diejenigen Funktionen aus $F_k(B)$, welche sich durch endlich oftmalige Zusammensetzung aus den konstanten Funktionen und den Projektionen mit Hilfe der Operationen von $F_k(B)$ aufbauen lassen, heißen k-stellige Polynomfunktionen von B. Sie bilden eine Unteralgebra von $F_k(B)$, welche wir mit $P_k(B)$ bezeichnet haben. - $((a \cap x_1') \cup x_2) \cap b$ ist ein Beispiel für eine zweistellige Polynomfunktion.

Für Anwendungen in der Schaltalgebra und Aussagenlogik ist die Frage bedeutend, wann $F_k(B)=P_k(B)$ gilt.

Wie man mit Hilfe eines "Normalformensystems" für $P_k(B)$ unschwer zeigen kann, gilt $F_k(B)=P_k(B)$ genau dann, wenn $|B|=2$ oder $|B|=1$ ist. Bezeichnen wir die zweielementige Boolesche Algebra mit W, so besagt unser Ergebnis also, daß alle k-stelligen Funktionen von W Polynomfunktionen sind. Dies kommt dann zum Tragen, wenn wir bedenken, daß man in der Schaltalgebra beliebige k-stellige Funktionen von W durch Schaltungen veranschaulichen möchte bzw. in der Aussagenlogik Aussagen zu beliebigen k-stelligen Funktionen auf W sucht, daß aber die einzigen Funktionen, welche Schaltungen bzw. Aussagen beschreiben, Polynomfunktionen sind. Dazu kommt noch, daß man das Rechnen in $P_k(B)$ vollständig beherrscht, was die Bedeutung des Zusammenhangs von $P_k(W)$ und $F_k(W)$ noch mehr verständlich macht. - Die Identität $P_k(W)=F_k(W)$ kann also als der eigentliche Grund dafür angesehen werden, daß es überhaupt möglich ist, die Theorie der Booleschen Algebren in der Schaltalgebra und Aussagenlogik anzuwenden.

3. Forschungsprobleme im Unterricht

Häufig gewinnen Schüler den Eindruck, daß die meisten Probleme in der Mathematik bereits gelöst sind oder zumindest lösbar sind und nicht selten hört man die Frage, was es eigentlich noch zu erforschen gäbe. Um solchen Tendenzen entgegenzuwirken erweist es sich als günstig, ab und zu im Unterricht auf berühmte gelöste oder ungelöste Probleme zu sprechen zu kommen. Aus dem Verständn[is] der bisherigen Ausführungen heraus ist es möglich, im Unterricht etwa die folgenden Fragen zu erörtern.

(1) Ist jeder eindeutig komplementäre Verband distributiv?
Läßt man den Schüler etwas "herumprobieren", so wird er (natürl[ich]) kein Gegenbeispiel finden - insbesondere ist für jeden Verband endlicher Länge und jeden modularen Verband, um nur einige wenige Beispiele zu nennen, die Frage zu bejahen. - Es wird den Schüler nach den vorangegangenen eigenen Anstrengungen aber dann si[cher]lich interessieren, daß es erst 1945 gelang, das Problem zu lösen[:] Dilworth zeigte, daß die Antwort auf Frage (1) nein ist.

(2) Ist jeder endliche Verband isomorph zu einem Teilverband eine[s] endlichen Zerlegungsverbandes?

Im Jahr 1946 zeigte Whitman, daß jeder Verband isomorph zu einem Teilverband eines Zerlegungsverbandes ist, und er sprach die berühmt gewordene Vermutung aus, daß jeder endliche Verband isomor[ph] zu einem Teilverband eines endlichen Zerlegungsverbandes ist. - I[t] hatte über 30 Jahre gedauert bis diese Vermutung im Jahre 1978 du[rch] die Mathematiker Pudlák und Tůma bestätigt werden konnte! Also ein berühmtes Problem, daß erst in unseren Tagen gelöst wurde.

(3) Sei D ein zweielementiger distributiver Verband. Wie groß ist die Anzahl der Elemente von $P_k(D)$?

Auch bei diesem Problem kann sich der Schüler selbst versuchen. Es wird ihm sicherlich gelingen, zu zeigen, daß $|P_1(D)|=3$ ist. Auch der Nachweis, daß $|P_2(D)|=6$ ist, ist noch im Bereich seiner Möglichkeiten. Für k=3 bzw. 4 gilt: $|P_3(D)|=20$, $|P_4(D)|=168$. Es ma[g] wundern, daß man bis heute (trotz der Möglichkeit des Einsatzes großer Computer) noch nicht mehr kennt als $|P_k(D)|$ für $k\leq 7$!

Literaturhinweise

[1] Bürger-Dorninger-Nöbauer: Boolesche Algebra und Anwendungen, Beiträge zur Lehrerfortbildung Bd 14, Österr. Bundesverlag, Wien, 1974.

[2] Crawley-Dilworth: Alrebraic Theory of Lattices, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

[3] Grätzer G.: General Lattice Theory, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1978.

[4] Hermes H.: Einführung in die Verbandstheorie, Springer, Berlin, 1967.

[5] Skornjakow L.A.: Elemente der Verbandstheorie, Wissenschaftliche Taschenbücher Bd 130, Akademie-Verlag, Berlin, 1973.